

Devoirs de vacances

Mathématiques

**Classes Préparatoires
ECGA2**

Chèr(e) futur(e) élève de seconde année,

Voici venu le temps d'un repos bien mérité. Ce temps peut permettre à certains d'entre vous de faire le point sur des notions mal assimilées pendant l'année. C'est dans cet esprit que je vous propose ce devoir de vacances.

Trois parties le composent :

Vous trouverez dans une première partie des exercices « de révision ». Ces exercices ont été faits avec Monsieur VAILLANT pendant votre première année. Vous trouverez pour chacun d'entre eux les références qui vous permettront de retrouver le corrigé détaillé de votre professeur.

Dans une deuxième partie vous trouverez d'autres exercices pour vous entraîner.

Pour chaque exercice, vous trouverez dans la troisième partie de ce livret des aides et des solutions. Il est nécessaire de ne pas s'en tenir là. La rédaction, le raisonnement, la rigueur des calculs et de l'argumentation sont essentiels dans l'appréciation des copies des concours. Il vous faudra donc reprendre les corrigés des exercices « de révision » faits pendant votre première année pour vérifier votre travail.

En tout, ce sont 15 exercices ou problèmes qui vous sont proposés. Les 4 premiers ont déjà été faits en première année. Tous ces exercices peuvent être traités dans l'ordre proposé, ou bien par thèmes (toutes les limites, puis toutes les dérivées, puis...). Si vous n'arrivez pas à tout faire, il est conseillé de travailler en profondeur certains thèmes (quitte à en délaissier d'autres) plutôt que d'avoir des connaissances imparfaites sur tout.

Ces exercices ne sont pas obligatoires et donc ne seront pas notés mais ils sont essentiels pour synthétiser les notions de première année et aborder la seconde année sereinement. Ils sont aussi un bon indicateur de la motivation des élèves. La très grande majorité des élèves qui ont intégré une école du « TOP 5 » avaient fait ces exercices pendant l'été. Vous serez évalués sur ces notions dès le début de la seconde année. Vous pourrez faire les exercices « d'approfondissement » sur votre cahier d'exercices de deuxième année.

En fin de ce petit livret vous trouverez également quelques conseils utiles pour réussir en classe préparatoire. Certains d'entre eux peuvent s'appliquer à votre travail estival, notamment la mise à jour de vos fiches de cours et d'erreurs (voir points 4. et 5. page 45).

Un autre livret « des oublis et des erreurs » vous a été distribué. Gardez le précieusement. Il vous servira toute l'année prochaine. Vous y trouverez les références mentionnées dans la partie 3 de ce livret. Vous pouvez d'ores et déjà le parcourir en cochant les méthodes ou formules que vous maîtrisez mal. C'est un très bon moyen de vérifier ces connaissances.

J'espère que ces livrets répondront à vos attentes et espère vous voir en grande forme à la rentrée.

B.BONNET

Les révisions

Exercice 1 (d'après EML 2010)

voir DS 5

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Etude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. a. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
b. Calculer, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$.
c. En déduire le sens de variation de f .
d. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (*Factorisation judicieuse nécessaire*)
3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.
5. On introduit pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
a. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer F' .
c. Dresser le tableau de variations de F et retrouver le résultat de la question 5.a.

Partie II : Etude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
2. Etablir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
3. Etablir un programme en *Python* qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
4. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté x_n , tel que $f(x_n) = n$.
Préciser x_0 .
b. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
c. Montrer que, pour tout entier naturel, $x_n \geq n$. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie III : Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln 1+x^2 \, dx$.

1. Calculer I_1 en utilisant le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

Qu'en déduit-on sur la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx.$$

5. Etablir pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+3}$.

En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Voir DM 6

Dans son atelier, John von Neumann possède une machine permettant de créer, pour chaque nombre réel $p \in]0,1[$, une pièce tombant sur PILE avec probabilité p . On nomme "pièce équilibrée", une pièce dont la probabilité de tomber sur PILE est $1/2$.

L'exercice est composé de deux parties **indépendantes**. Dans tout l'énoncé, on note $P(A)$ la probabilité d'un événement A .

Première partie

On considère un nombre réel $p \in]0,1[$, et on utilise dans cette partie, une pièce de l'atelier de von Neumann ayant une probabilité p de tomber sur PILE.

1. On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.

- a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de X et justifier votre réponse.
- b. Calculer la probabilité $P(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X .
Donner en particulier $P(X = 1)$.

2. Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme "succès" le fait d'obtenir deux résultats différents et "échec" celui d'obtenir deux résultats identiques. Quelle est la probabilité de "succès" de cette expérience de Bernoulli ?

3. On répète indéfiniment des manches comme ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note N la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.

- a. Dans le cas où les tirages successifs sont PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, ... (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de N .
- b. Reconnaître la loi de N et donner l'expression de $P(N = k)$ pour toutes les valeurs k prises par N .
- c. Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de N .

4. Pour deux joueurs Alice et Bob souhaitant s'affronter, l'atelier de von Neumann conseille le

jeu suivant : à l'aide d'une pièce de sa production, on réalise une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques.

On déclare alors Alice gagnante si l'issue d'une des deux manches est PF et Bob est gagnant si l'issue d'une des deux manches est FP. Dans les autres cas, la partie est nulle. Par exemple, si on lance la pièce et que l'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.

a. Calculer, en fonction de p , la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.

b. Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun des deux joueurs ne remporte la première manche) est égale à

$$p(1 - p)(p^2 + (1 - p)^2)$$

c. Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur du paramètre p , le jeu est équitable.

Deuxième partie

Dans cette partie de l'exercice, on considère une pièce équilibrée ($p = 1/2$) que l'on lance successivement trois fois. On note S la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces trois lancers. On note aussi T la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors de ces trois lancers et égale au rang du premier PILE obtenu si un PILE apparaît.

Par exemple, si une succession de trois lancers amène " FPF ", on a $S = 1$ et $T = 2$.

5. Le programme *Python* ci-contre a pour objectif de simuler une succession de 3 lancers et d'afficher les valeurs prises par S et T .

Recopier et compléter la ligne 7 afin que ce programme affiche la bonne valeur de S

```
1 import numpy.random as rd
```

```
2 S = 0
```

```
3 T = 0
```

```
4 for k in range(1,4):
```

```
5     r = rd.random()
```

```
6     if r < 1/2 :
```

```
7         S =...
```

```
8     if r < 1/2 and T == 0 :
```

```
9         T = k
```

```
10 print ("S = ",S,"et T = ",T)
```

6. Reconnaître la loi de S . Donner son espérance.

7. Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

8. Décrire l'évènement $((S = 2) \cap (T = 1))$ et calculer sa probabilité.

On dispose d'une pièce truquée, donnant *Pile* avec la probabilité p , et *Face* avec la probabilité $1 - p$. On la lance désormais autant de fois que nécessaire pour obtenir le premier *Pile*, et on note X le nombre de *Faces* obtenues avant le premier *Pile*.

On considère la variable aléatoire $Z = X + 1$.

1. Reconnaître la loi de Z . Donner son espérance et sa variance.
2. En déduire l'espérance de X .
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 1 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{2}{t^3} \text{ si } t \geq 1.$$

1. a. On pose pour $A \geq 1$:

$$I(A) = \int_1^A \frac{2}{t^3} dt$$

Montrer que $I(A) = 1 - \frac{1}{A^2}$

- b. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans une station-service, on appelle « durée de distribution » le temps en minutes nécessaire à un automobiliste pour se garer, faire le plein, payer et repartir.

On suppose que la variable aléatoire X égale à la durée de distribution est de densité f .

2. Soit F la fonction de répartition de X . Déterminer F .

3. a. Calculer la probabilité que la durée de distribution soit d'au moins 2 minutes, la probabilité qu'elle soit de moins de 3 minutes et enfin la probabilité qu'elle soit comprise entre 2 et 3 minutes.

b. On suppose qu'un client est à la pompe depuis déjà 2 minutes. Quelle est la probabilité qu'il reste encore moins d'une minute ?

4. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

Partie 2 : Pour approfondir

Exercice 5 (d'après ESC ECT 2003)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul. On donne $e \approx 2,7$.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α et que $1 < \alpha < 2$.
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

1. Justifier que f est continue sur $]0 ; +\infty[$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifier.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$$

5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$.

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. Ecrire un programme en *Python* permettant de trouver le premier entier n tel que : $u_n \leq 10^{-3}$.

Exercice 6 (d'après EML 2009)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1 : Etude d'une fonction

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

On admet que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. a. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1.$$

b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Dresser le tableau des variations de f .

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

2. a. Établir : $\forall x \in [0 ; +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

b. Montrer : $\forall x \in] 0 ; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

c. Montrer : $\forall x \in [0 ; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

5. Ecrire un programme en *PYTHON* qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que :
 $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

b. Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0], G(x) \leq x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 7

1. Questions préliminaires

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$ et $A \neq I$.

a. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I , A et A^2 .

b. Déterminer les racines du polynôme $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

c. En déduire que la matrice $A - 2I$ n'est pas inversible.

d. Que peut-on dire alors du nombre de solutions de l'équation $(A - 2I)X = 0$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$?

On considère à présent la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on donne $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \\ 20 & -36 & 17 \end{pmatrix}$

2. Calculer A^3 puis vérifier que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$

3. Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_1 , dont la première composante est égale à 1.

4. Notons $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que U_2 est solution de l'équation $AX = 2X$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. Résoudre $AX = 2X + U_2$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_3 , dont la première composante est nulle.

6. Posons maintenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.

b. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

- d. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$
- e. Justifier l'existence d'une matrice diagonale D telle que : $T = D + N$.
Montrer que D et N commutent.
- f. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver l'expression de T^n .
- g. Conclure sur l'expression de A^n .

Exercice 8 (Ecricome 2011)

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n .

On dit qu'une matrice Δ carrée d'ordre n est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que : $P^{-1}\Delta P = D$

Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. Déterminer les valeurs propres de A .
b. Déterminer les vecteurs propres de A c'est-à-dire les matrices colonnes X de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$, où λ est une valeur propre de A .
3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a. Calculer les produits ΔX_1 , ΔX_2 et ΔX_3 .
b. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .
c. Déterminer une matrice diagonale D telle que : $P^{-1}\Delta P = D$.
d. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\Delta^n = P D^n P^{-1}$.
4. a. Etablir que N est une matrice nilpotente.
b. Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A .
c. En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ , de N et de n .
d. Etablir que : Pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
e. Proposer une décomposition de Dunford de A^n .

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n .

D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .

3. a. Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$

et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

d. Établir alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

4. a. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

c. Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}$$

et

$$P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $M_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

7. a. Montrer (grâce à certains résultats de la **partie 1**) que, si l'on pose

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A.$$

b. Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n.$$

c. En déduire la première ligne de A^n .

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. a. Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b. À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J .

c. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie I : Tirages dans une urne

Une urne U contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans U . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
 - a. Quelle est la loi de X ?
On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
 - b. Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X , notée $V(X)$ est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans U à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
 - a. Quelle est la loi de Y ?
On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
 - b. Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne U successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
 - a. Quelle est la loi de Z ?
On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
 - b. Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne U contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne V contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans U , et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans V .

On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T . On vérifiera que $P(T = 1) = \frac{7}{16}$
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

Exercice 11

Pour chacune des parties A et B de cet exercice, l'urne considérée initialement contient 4 boules indiscernables au toucher : **1 blanche et 3 rouges**.

Pour faciliter la rédaction, on pourra utiliser les événements R_k : "le k -ième tirage donne une boule rouge" et B_k : "le k -ième tirage donne une boule blanche".

Partie A

On effectue des tirages d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire l'événement $(X = 2)$ et calculer $p(X = 2)$.
3. Déterminer la loi de X , son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.
4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête.

Exprimer Y en fonction de X .

En déduire la loi de Y , son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

Partie B

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur.

On note Z la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors $Z = 6$.

1. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
2. Calculer $p(Z = 2)$ et $p(Z = 3)$.
3. Décrire l'événement $(Z = 4)$, puis l'événement $(Z = 2k)$ pour tout entier $k \geq 1$, et montrer que pour tout entier naturel non nul k :

$$p(Z = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$$

4. Décrire l'événement $(Z = 5)$, puis l'événement $(Z = 2k + 1)$ pour tout entier $k \geq 1$, et montrer que pour tout entier naturel non nul k :

$$p(Z = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16} \right)^k$$

5. On pose :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} p(Z = 2k) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p(Z = 2k + 1)$$

Montrer que ces deux séries convergent et déterminer leurs sommes.

Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.

Exercice 12 (D'après ECRICOME 2019)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
3. a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.

- b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X .
 - a. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
- c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

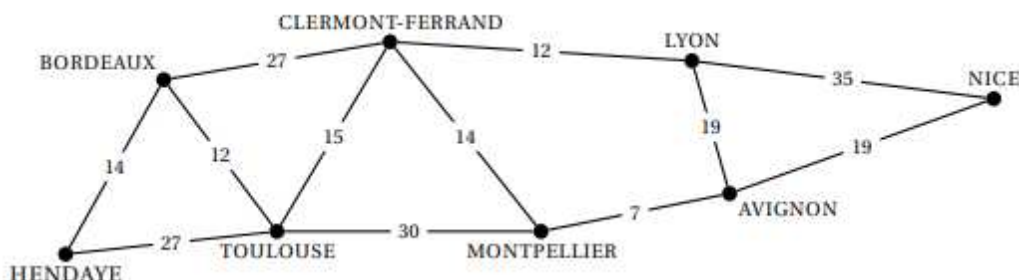
Exercice 13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 7y = 2$. On donnera l'ensemble des solutions puis la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition : $f(0) = \frac{5}{7}$.
2. $3y' - 4y = -4x^3 + 9x^2 + 4x - 11$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3.
3. $y' + y = (-4x + 1)e^{-2x}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $P(x)e^{-2x}$ où P est une fonction polynôme.
4. $y'' - 10y' + 25y = 50$
5. $y'' + 5y' + 6y = 2x - 3$. On donnera l'ensemble des solutions en recherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 puis la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition : $f(0) = \frac{20}{9}$ et $f'(0) = -\frac{23}{3}$.
6. $y'' - 9y = e^{2x} + 3x$. Une solution particulière s'obtiendra en ajoutant une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 9y = e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto ke^{2x}$ et une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 9y = 3x$ sous la forme d'un polynôme du premier degré.

Exercice 14

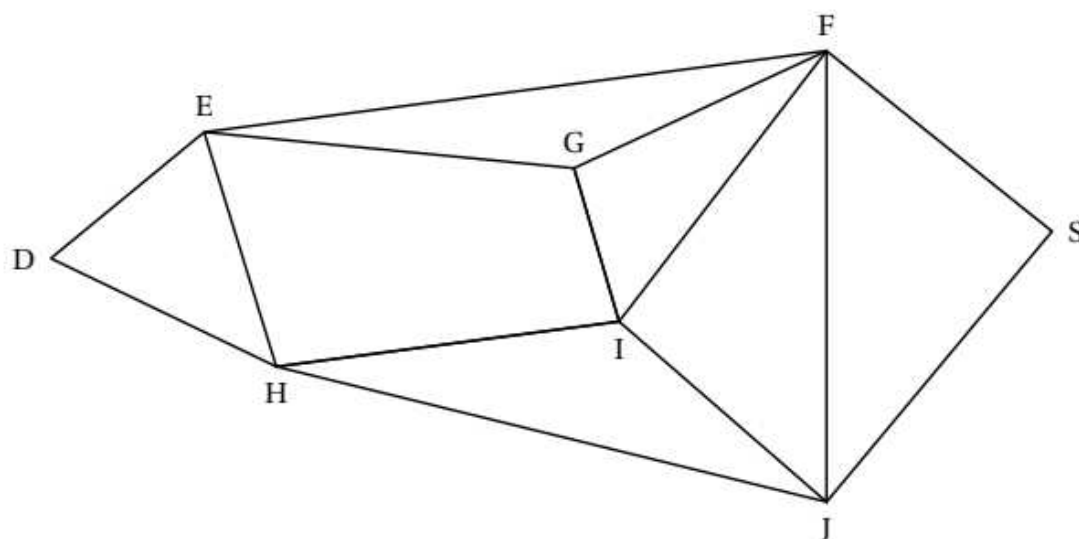
Le graphe ci-dessous représente le tarif moyen, en euro, demandé sur un site de covoiturage pour effectuer le trajet entre des villes du sud de la France.



1. En justifiant la réponse, dire si :
 - a. le graphe est complet;
 - b. le graphe est connexe;
 - c. il existe une chaîne eulérienne.
2. Une personne veut aller de Hendaye à Nice. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet qui serait le plus économique et préciser le coût de ce trajet.

Exercice 15

Un club cycliste se prépare pour une compétition. Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition : les arêtes représentent les routes et les sommets représentent des points de passage.



1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. a. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Justifier.
b. Si un tel trajet existe, en citer un.
3. Soit M la matrice d'adjacence de ce graphe pour laquelle les sommets sont cités dans l'ordre alphabétique : D, E, F, G, H, I, J, S.

a. On donne :

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il manque certains coefficients de la matrice M . Recopier et compléter uniquement la partie manquante de M .

b. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 9 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant trois routes. Combien d'itinéraires différents sont possibles ? Donner la liste complète.

Partie 3 : Aides et solutions

Exercice 1 (d'après EML 2010)

voir DS 5

Partie I : Etude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1.a. Aide : Pour qu'un réel x soit dans l'ensemble de définition, il faut et il suffit d'avoir $1 + x^2 > 0$
 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b. Rappel : Avant de dériver une fonction vous devez chercher l'ensemble de dérivabilité. A se noter : **Ana 45**

Aide : Dérivée et ensemble de dérivabilité de $\ln(u)$: Voir **Ana 102**

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

c.

Remarque : Un petit écueil à éviter concernant le signe d'une fonction (ou d'une dérivée) : Voir **Ana 58**
 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{d. } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2(x-1)[x+1]}{[1+x^2]^2}.$$

2. Aide : Utilisez les propriétés de la fonction $\ln$.

Voir **Ana 37**

$$\ln(1 + x^2) = \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

puis factorisez $f(x)$ par x .

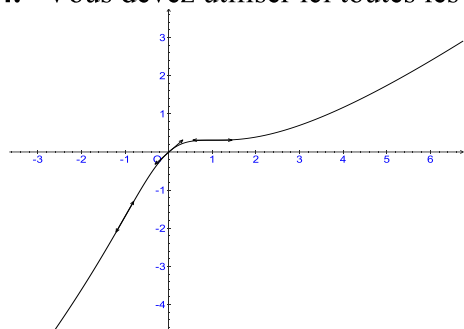
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Aide : Comment trouver des points d'inflexion :

Voir **Ana 69**

$\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion en $(-1, f(-1))$ et en $(1, f(1))$, c'est-à-dire en $(-1, -1 - \ln 2)$ et en $(1, 1 - \ln 2)$.

4. Vous devez utiliser ici toutes les informations que vous avez trouvées dans les questions précédentes.



- La tangente à $\mathcal{C}$ à l'origine est la droite d'équation $y = x$.
- Puisque $f'(1) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est horizontale.
- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est la droite d'équation $y = 2(x+1) - 1 - \ln 2 = 2x + 1 - \ln 2$.

5. a. Aide : Pour trouver le signe d'une intégrale vous devez commencer par l'étude du signe de la fonction qui est sous l'intégrale.

Voir **Ana 77**

F est positive sur $\mathbb{R}$.

b. Aide : F est une fonction définie par une intégrale. Pour se rappeler la manière d'étudier une fonction définie par une intégrale, voir **Ana 79**.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x).$$

c. F est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un maximum en 0 qui est 0. Donc F est positive sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Etude d'une suite et d'une série associées à f

1. **Aide :** Utilisez une récurrence

2. **Aide :** Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0 puis utiliser le théorème du point fixe pour montrer qu'elle converge vers 0. Méthodes à utiliser : **Ana3 et 13**

3. **Remarque :** Cette question est très classique. Vous l'avez déjà rencontrée avec Monsieur VAILLANT. N'hésitez pas à la mettre sur fiche. Beaucoup d'élèves ne traitent pas les questions sur PYTHON alors qu'elles sont très bien valorisées.

Une possibilité :

```
from math import *
def f(x):
    y = x - log(1 + x ** 2)
    return y
u = 1
n = 0
while u > 0.001 :
    u = f(u)
    n = n + 1
print ( "La valeur de n est : ", n)
```

4.a. Remarques :

- On ne peut pas calculer x_n pour tout entier n . On veut juste prouver son existence et son unicité. Nous allons donc utiliser le théorème de la bijection. Voir **Ana64**
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite « implicite ». Les questions qui vous sont demandées ici sont très classiques. Vous pouvez vous les mettre sur fiche.

On trouve $x_0 = 0$.

b. **Aide :** Il faut utiliser f^{-1} et remarquer que $n + 1 \geq n$.

c. **Aide :** Commencer par justifier que $f(n) \leq n$ puis utiliser f^{-1} . $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Partie III : Etude d'une suite d'intégrales

1. N'oubliez pas de justifier que $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe C^1 et strictement monotone sur $[0 ; 1]$ pour le changement de variables. A se noter : **Ana 80**

$$I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

2. **Aide :** La méthode est classique : Vous calculer pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n$ en regroupant sous une seule intégrale grâce à la linéarité de l'intégrale. Puis vous étudier la fonction qui est sous l'intégrale en la factorisant au maximum. Voir **Ana 77**

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. **Attention :** Vous utilisez le théorème d'encadrement, pas de comparaison ici (**Ana4**)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. N'oubliez pas les justifications des intégrations par parties. Voir **Ana 80**

5. **Aide :** Commencer par encadrer $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0 ; 1]$. Pour la méthode voir **Ana 77**

6. **Aide :** Commencez par trouver la limite de $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$ à l'aide de la question 5. puis conclure à l'aide de la question 4.

On trouve : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln 2$.

Une remarque générale sur les variables aléatoires discrètes. Il y a peu de propriétés, de connaissances à avoir sur ces exercices donc beaucoup de questions sont accessibles quel que soit son niveau. Par contre il convient de savoir bien écrire les relations avec les événements et les variables aléatoires. Avant de commencer ces exercices, je vous invite à bien lire les propriétés **Pr1** à **Pr5**, **Pr7**, **Pr8**, **Pr10** ainsi que les lois usuelles : **Pr19** à **Pr24** du « livret des oublis et erreurs » qu'on vous a distribué.

Première partie

1. a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2; p)$.

Remarque : Vous devez savoir reconnaître et justifier les lois de Bernoulli, binomiales, géométriques et uniformes. Faites-vous des fiches avec les rédactions que vous avez vues en première année. Il faut traiter rapidement et parfaitement ces « questions de cours ».

b. **Aide :** Voir **Pr21**

On trouve : $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(X = k) = \binom{2}{k} p^k q^{2-k}$ avec $q = 1 - p$

Donc $P(X = 1) = 2pq$.

Remarque : Si vous avez du mal avec les coefficients binomiaux ... **G11**

2. a. **Aide :** Ce n'est pas une question de mathématiques mais de compréhension de l'énoncé ... La probabilité d'un succès est $P(X = 1)$ donc $2pq$.

3. a. **Aide :** Ici encore, on vous demande de bien comprendre l'énoncé.

On trouve $N = 6$

b. **Aide :** Vous devez repérer une loi usuelle ... Voir **Pr22**

N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(2pq)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = (1 - 2pq)^{k-1} 2pq$ avec $q = 1 - p$

c. Donc N admet une espérance et une variance :

$$E(N) = \frac{1}{2pq} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1 - 2pq}{(2pq)^2}$$

4. a. **Remarque :** La notation PF est bien comprise mais la notation habituelle à utiliser dans les sujets pour exprimer « obtenir *Pile* au premier lancer puis *Face* au second » . Il faudrait l'écrire $P_1 \cap F_2$.

La probabilité que Alice gagne la première manche est :

$P(P_1 \cap F_2) = P(P_1) \times P(F_2)$ car les événements P_1 et F_2 sont indépendants (Voir **Pr5**)

Donc la probabilité que Alice gagne la première manche est $pq = p(1 - p)$.

b. Pour qu'Alice gagne à la seconde manche, il faut que personne ne gagne la première (il faut donc **PP** **ou** **FF**) **et** qu'elle gagne la seconde. On peut l'écrire : $[(P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)] \cap (P_1 \cap F_2)$.

Donc la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche est :

$P[(P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)] \times P(P_1 \cap F_2)$ car les deux manches sont indépendantes

$= [P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2)] \times P(P_1 \cap F_2)$ car les événements $(P_1 \cap P_2)$ et $(F_1 \cap F_2)$ sont incompatibles (ne peuvent pas se produire en même temps)(Voir **Pr4**)

$= [P(P_1) \times P(P_2) + P(F_1) \times P(F_2)] \times P(P_1) \times P(F_2)$ car les lancers sont indépendants
 $= (p^2 + (1 - p)^2)p(1 - p)$

c. **Aide :** A l'aide d'un raisonnement ou d'un calcul identique à celui qu'on a fait à la question précédente, vous devez montrer que la probabilité que Bob gagne la première ou la seconde manche est identique à celles d'Alice (il faut échanger les lettres p et q).

Deuxième partie

5. Les sujets proposés aux concours font de plus en plus appel aux questions d'informatique. Je n'ose vous conseiller de faire des efforts pour traiter ces questions.

Dans ce programme, on va faire 3 fois une boucle *for*. Cela correspond à nos 3 lancers. Pour simuler l'obtention d'un *Pile* on utilise la commande *rd.random()* qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à un nombre p alors un événement de probabilité p est intervenu.

Pour notre exercice cette condition (*rd.random()* < 1/2) est écrite en 2 lignes (lignes 5 et 6) et simule

l'obtention d'une *Pile*. Lorsque cette condition est réalisée, le nombre de *Pile* augmente d'une unité. C'est ce qu'il fallait écrire en ligne 7 : $S = S + 1$.

6. S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 1/2)$. $E(S) = 3/2$ (Rappel de la formule : **Pr21**)

7. **Aide :** Ici encore, on vous demande de réfléchir ... aucune connaissance n'est utile.

T peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3. Cela peut se noter : $T(\Omega) = \llbracket 0; 4 \rrbracket$.

8. $((S = 2) \cap (T = 1)) = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$

Puisque les événements $(P_1 \cap P_2 \cap F_3)$ et $(P_1 \cap F_2 \cap P_3)$ sont incompatibles (Voir **Pr4**) alors

$$P((S = 2) \cap (T = 1)) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ = P(P_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)$$

car les lancers sont indépendants,

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \dots = \frac{1}{4}$$

Exercice 3

Voir DS5

1. **Aide :** Si X donne le nombre de *faces* obtenu avant le premier *Pile* alors $X + 1$ compte le rang du premier *Pile*. Cela doit vous faire penser à quelque chose ...

On trouve : Z suit la loi géométrique de paramètre p . On utilise alors son cours : **Pr22**

$$E(Z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$

2. et 3. **Aide :** Vous devez connaître les formules donnant $E(aX + b)$ et $V(aX + b)$: voir **Pr29**

$$E(X) = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 4

1. a. **Aide :**

Pour tout entier $n > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ a pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ (A se noter ? **Ana 103**).

b. Vous devez montrer 3 propriétés : voir **Pr13**

2. **Aide :** voir **Pr15**

Attention : il faut calculer F sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

$$\text{On trouve : } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

3. a. **Pour une variable aléatoire à densité**, l'intérêt principal est de pouvoir calculer des probabilités : Voir **Pr17**.

On trouve : $P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1/4$.

$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{8}{9} \quad \text{et} \quad P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{5}{36}$$

$$\text{b. } P_{X \geq 2}(X \leq 3) = \frac{P[(X \geq 2) \cap (X \leq 3)]}{P(X \geq 2)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 2)} = \dots = 5/9$$

4. **Remarque importante :** On ne sait pas, a priori, si X admet une espérance mathématique. On ne peut donc commencer cette question en écrivant : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$. ($E(X)$ doit être un réel. Si

$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = +\infty$, on ne peut pas écrire $E(X) = +\infty$).

Aide : Vous aurez encore besoin d'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$.

Apprenez par cœur la rédaction suivante lorsque vous devez chercher l'espérance d'une variable aléatoire à densité : « X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente », puis vous calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ et, en fin de calcul, si cette intégrale converge vers un réel, vous écrivez que $E(X)$ est égal à ce réel.
On trouve : $E(X) = 2$.

Exercice 5 (d'après ESC ECT 2003)

Partie A

1. **Attention :** Ce n'est pas une « croissances comparées ». Voir **Ana43**.

On trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. **Aides :**

- Il faut évidemment calculer la dérivée de g mais n'oubliez pas l'ensemble de dérivabilité ! Voir **Ana 45**

- On doit utiliser la dérivée de $u \times v$ (voir **Ana 102**) mais attention : $v(x) \neq e^x - 2$

On trouve : $g'(x) = (-x + 1)e^x$.

- On montre que g est croissante sur $[0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$. Et $g(0) = 0$.

Remarque : Ce n'est pas beaucoup plus long de faire le tableau de variations mais ce n'est pas demandé.

3. **Aide :** Cela doit vous faire penser à une bijection. Voir **Ana 64**.

4. g est positive sur $[0 ; \alpha]$ et est négative sur $[\alpha ; +\infty[$.

Partie B

1. **Aides :**

- Attention :** ce n'est pas une fonction rationnelle car e^x n'est pas un polynôme.

- Vous devez utiliser la continuité d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$. Voir **Ana 102**.

- Avez-vous pensé à montrer que le dénominateur ne s'annule jamais sur $]0 ; +\infty[$? Voir **Ana 50**

2. **Aides :**

- Vous devez trouver une fonction qui est égale à f sur $]0 ; +\infty[$ et dont on donnera une valeur en 0. Quelle valeur ? La limite de f en 0 évidemment pour que cette nouvelle fonction soit continue en 0 ?

- Comment montre-t-on qu'une fonction est continue en 0 ? Voir **Ana 46**

- Comment calcule-t-on la limite de f en 0 ? Voir **Ana 39**

3. **Aide :** Factorisez le dénominateur par e^x puis utilisez une « croissances comparées » Voir **Ana 43**

On trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4. **Aide :** Vous trouverez toutes les « dérivées classiques » en **Ana 102**. Prenez le temps pour calculer les dérivées sans vous tromper. Beaucoup de questions dépendent de leurs résultats !!!

5. **Aide :** Utilisez le résultat de la question 4. de la **partie A**.

On obtient :

x	0	α	$+\infty$
Variations de f	0	$f(\alpha)$	0

6. **Aides :**

- Vous ne savez qu'une seule chose sur α : vous savez que $g(\alpha) = 0$. On doit donc forcément s'en servir !

- L'expression $f(\alpha)$ qui nous est proposée ($\alpha(2 - \alpha)$) ne contient pas e^α . Il faut donc qu'on exprime e^α à l'aide de α et nous ne connaissons qu'une seule chose sur α : $g(\alpha) = 0$.

Remarque : Lorsque vous avez un peu de temps, n'hésitez pas à chercher longtemps des questions qui vous paraissent difficiles. Cela vous permet de gagner de la confiance. C'est important la confiance ! (Voir conseil n°7 en fin de ce livret)

Partie C

- $u_1 = \frac{1}{e-1}$
- Aide :** Avez-vous penser à un raisonnement par récurrence ? Pour l'hérédité vous devez utiliser la monotonie de f sur $]0; 1]$. Voir **Ana 23**.
- Aide :** Peut-être moins simple à voir que la question précédente car on ne voit pas comment intervient n mais ici encore on utilise un raisonnement par récurrence : on doit montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} \leq u_n$.
- Aide :** Pas si simple. On peut utiliser le théorème du point fixe (voir **Ana 13**). Cela nous ramène à trouver les solutions de l'équation $f(x) = x$. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0. On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation. On peut le faire en plusieurs étapes :
 - Montrer que dans $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
 - Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
 - En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0; +\infty[$.
 On peut alors conclure que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Les sujets proposés aux concours font de plus en plus appel aux questions d'informatique. Je n'ose vous conseiller de faire des efforts pour traiter ces questions. Ici on a une « boucle *while* » très classique. On peut proposer :

```
from math import *
u = 1
n = 0
while u > 0.001 :
    u = u ** 2 / (exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

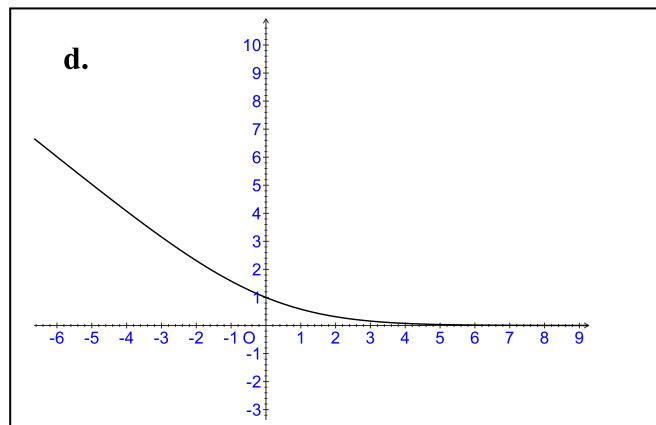
Exercice 6 (EML 2009)

Partie 1 : Etude d'une fonction

- Aide :** On traite différemment la continuité en une valeur (en 0 ici) et la continuité sur un intervalle. (Voir **Ana 46 et Ana 102**). Puisqu'on demande de prouver que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ on peut le montrer dès la première question car nous savons que si f est de classe C^1 sur un intervalle elle sera également continue sur cet intervalle.
Attention : Dès que vous affirmez qu'une fonction est dérivable, continue, croissante ... vous devez préciser sur quel intervalle. (voir **Ana 53**).
 - $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$.
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -xe^x$ (on utilise la dérivée d'un produit ici : voir **Ana 102**). u est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
 - Aide :** Quel est le maximum de u ? En déduire le signe de u .

c. Vous utiliserez les croissances comparées (voir **Ana 43**) après avoir factorisé par e^x le dénominateur.
On trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	0



Partie 2 : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

- Ne confondez pas le théorème du point fixe (voir **Ana 13**) et le point fixe d'une fonction. Ici on cherche le ou les points fixes donc la ou les solutions de l'équation $f(x) = x$. On trouve : $\alpha = \ln 2$.
- a. **Aide :** Étudiez les variations de la fonction $h : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ définie sur $[0 ; +\infty[$ (vous devrez alors étudier les variations d'une autre fonction pour avoir le signe de h').
c. Nous avons déjà montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$. Pour l'autre inégalité, utilisez les deux questions précédentes.
d. La fin de cet exercice est très classique. Regardez l'exercice 1.
N'oubliez pas les conditions d'utilisation de l'inégalité des accroissements finis (voir **Ana 70**)
- Aide :** Essayez une récurrence. Attention à 2 erreurs fréquentes : **G3** et **G4**.
- Attention :** Pour appliquer le théorème d'encadrement il faut avoir un encadrement ! (**Ana4**)
- Une possibilité :

```
from math import *
def f(x) :
    y = x / (exp(x) - 1)
    return y
u = 1
n = 0
while abs(u - log(2)) > 1e-9 :
    u = f(u)
    n = n + 1
print("La valeur de n est : ", n)
```

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

- Aide :** G est une fonction définie par une intégrale. Pour vous rappeler la méthode d'étude de ce type de fonctions regardez **Ana 79**. Posez vous alors quelques questions :
Quelle condition doit vérifier f pour que G soit définie ? Quelle relation peut-on alors écrire entre G et une primitive F de f ? Dérivez alors cette relation.
- a. G est une intégrale. Il faut encadrer une intégrale : voir **Ana 77**. On trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$
b. Même si le résultat semble le même qu'à la question précédente, on doit différencier ce cas du précédent car si x est négatif, $2x \leq x$ donc les bornes de G sont dans un ordre décroissant.
On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$

3.	x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
	Variations de G	$-\infty$	$G(\ln 3)$	0

Exercice 7

1. Questions préliminaires

- a. **Aide :** Si on trouve une matrice B qui vérifie $AB = BA = I$ alors $B = A^{-1}$ (attention à une erreur classique : Alg6).

Résultat : $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)$

Attention : N'écrivez pas $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8)$. On ne peut pas ajouter le nombre 8 aux autres matrices.

- b. **Aide :** On ne sait pas trouver les racines d'un polynôme du troisième degré, sauf si c'est une « racine évidente ». Il faut donc trouver un nombre entier compris entre -2 et 2 qui annule ce polynôme...

Lorsque vous aurez trouvé cette racine évidente il faut se rappeler une propriété : si α est une racine d'un polynôme P alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x - \alpha)$. Autrement dit on peut trouver un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$. On remarque alors que si P est de degré 3 alors Q n'est plus que de degré 2 !

Concrètement : Justifiez que P peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ puis trouvez le polynôme $ax^2 + bx + c$ par l'une des deux méthodes : division de polynômes ou par identification ...

Résultat : $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$ et $x^2 - 4x + 4$ peut encore se factoriser ... (voir G5)

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ a deux racines : 1 et 2.

- c. **Aide :** Justifiez que $(A - 2I)(A - 2I)(A - I) = 0$ puis raisonnez par l'absurde : supposons que $A - 2I$ est inversible donc que $(A - 2I)^{-1}$ existe alors ... vous devez obtenir une contradiction avec une information donnée dans l'énoncé. Vous pourrez alors conclure que $(A - 2I)$ n'est pas inversible.
- d. L'équation $(A - 2I)X = 0$ a une infinité de solutions. Ces solutions s'appellent **des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2**.

3. On résout : $AX = X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc l'équation a pour ensemble de solutions

$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On pose donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : $AX = X \Leftrightarrow AX - X = 0 \Leftrightarrow (A - I)X = 0$. Comme à la question 1.d. on a trouvé une infinité de solution : **les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1**.

4. On calcule ... $AU_2 = \dots = 2U_2$. On dira que **U_2 est un vecteur propre de A associés à la valeur propre 2**.

5. On pose $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout : $AX = 2X + U_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donc $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. a. Cette méthode (méthode de Gauss) doit être bien comprise. Entraînez-vous.

Résultat : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

N'oubliez pas que vous pouvez vous vérifier : $PP^{-1} = I$ (Voir Alg55)

a. **Résultat :** $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. **Aide :** Avez-vous penser à une récurrence ?

Deux remarques à bien comprendre sur ce raisonnement : voir **G3** et **G4**

e. **Aide :** On peut formuler la question autrement : « Montrer que $T - N$ est une matrice diagonale qu'on appellera D ».

f. **Aide :** Un petit rappel sur la formule du binôme ? (Voir **Alg12**)

g. **Aide :** On demande de calculer A^n à l'aide de la formule $A^n = PT^nP^{-1}$.

J'ai trouvé (A vérifier ...) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 + 2^n(n-3) & -4 + 2^{n-1}(8-3n) & 1 + 2^{n-1}(n-2) \\ 4 + 2^{n+1}(n-2) & -4 + 2^n(5-3n) & 1 + 2^n(n-1) \\ 4 + 2^{n+2}(n-1) & -4 + 2^{n+1}(2-3n) & 1 + n2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (Ecricome 2011)

2.a. **Aide :** Trouvez les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

A admet deux valeurs propres : 1 et 2.

b. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

3.a. $\Delta X_1 = 2X_1$; $\Delta X_2 = X_2$ et $\Delta X_3 = X_3$.

b. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

4.c. N'oubliez pas que les matrices Δ et N doivent commuter lorsque vous appliquez la formule du binôme de Newton à $(\Delta + N)^n$.

A se noter : **Alg 12**

Rappel : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

A se noter : **G 11**

On obtient : $A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N$.

e. (Δ^n, nN) est une décomposition de Dunford de la matrice A^n .

Exercice 9 (EDHEC 2017)

Une remarque générale sur les variables aléatoires discrètes. Il y a peu de propriétés, de connaissances à avoir sur ces exercices donc beaucoup de questions sont accessibles quel que soit son niveau. Par contre il convient de savoir bien écrire les relations avec les événements et les variables aléatoires. Avant de commencer ces exercices, je vous invite à bien lire les propriétés **Pr1** à **Pr5**, **Pr7**, **Pr8**, **Pr10** ainsi que les lois usuelles : **Pr19** à **Pr24** du « livret des oublis et erreurs » qu'on vous a distribué.

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. Tout est dans l'énoncé :

$$P(X_1 = 1) = 0 \text{ et } P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$$

Un peu d'aide pour calculer $E(X_1)$? : voir **Pr10**

On trouve : $E(X_1) = 3$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $X_n(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$

3. **Rappels :**

- Pour la formule des probabilités totales il vous faut un système complet d'événements (**Pr7**)
- En donnant toutes ses valeurs à une variable aléatoire discrète, on obtient un système complet d'événements (**Pr3**)

Aide : Les probabilités conditionnelles suivantes se déduisent de l'énoncé :

$$P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 0, \quad P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=4}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}$$

a. Cela paraît trop simple mais il n'y a pas de piège :

« $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$ est un système complet d'événements » est la seule justification à donner.

d. **Aide :** Posez $u_n = P(X_n = 1)$. On obtient alors une suite connue (voir **Ana11**).

Remarque : on peut également le montrer par récurrence.

4.b.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}[1 - P(X_n = 2)] = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}$$

c. Même méthode que pour la question 3.d.

6. **Aide :** voir **Pr10**

Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

7.c. $U_0 = (P(X_0 = 1) \quad P(X_0 = 2) \quad P(X_0 = 3) \quad P(X_0 = 4)) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

La première ligne de A^n est $(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$ soit :

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

9.

$$A = \frac{1}{3} [J - I] = -\frac{1}{3} I + \frac{1}{3} J \text{ donc : } a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{1}{3}$$

10.a. $J^2 = 4J$ puis on montre par récurrence : pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$J^k = 4^{k-1} J.$$

b. N'oubliez pas de montrer que les matrices commutent ...

Aide : Alg12

Pour tout entier n non nul on a :

$$\begin{aligned} A^n &= \left(-\frac{1}{3} I + \frac{1}{3} J\right)^n = \left(\frac{1}{3} J - \frac{1}{3} I\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3} J\right)^k \left(-\frac{1}{3} I\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} = \dots \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n J \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

On utilise alors encore la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} = (4 + (-1))^n = 3^n$$

On trouve, après des calculs ...

$$\forall n > 0, \quad A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] J$$

Exercice 10 (ECRIFORME T 2017)

Remarque générale : Les lois qui sont dans cet exercice doivent être connues et reconnues. C'est le bon moment pour vous faire des fiches. Pour chaque loi vous devez connaître le support $(X(\Omega))$, les probabilités $P(X = k)$ pour toute valeur k de $X(\Omega)$, l'espérance et la variance. Pour les lois uniformes, de Bernoulli, binomiales, et géométriques, vous devez également savoir les repérer dans un exercice et le justifier. Vous retrouver ces lois sous les références **Pr19** à **Pr24**. N'hésitez pas à lire également les deux références suivantes : **Pr28** et **Pr29**.

1. **a.** L'événement « tirer une boule noire » est appelé « succès » ...
2. **a.** Y donne le rang du premier succès ...
3. **a.** Remarquons tout d'abord que la boule noire peut être tirée entre le premier et le quatrième tirage donc $Z(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$.

Ensuite, vous aurez certainement besoin d'introduire des notations. Par exemple, si on note N_k : « la boule noire a été tirée au $k^{\text{ième}}$ tirage » et B_k : « une boule blanche a été tirée au $k^{\text{ième}}$ tirage » on peut écrire : $P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$, $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

et on continue avec la formule des probabilités composées (**Pr8**) :

$$P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On termine en utilisant le système complet d'événements $((Z = 1), (Z = 2), (Z = 3), (Z = 4))$:

$$P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = 1 \text{ donc } \dots P(Z = 4) = \frac{1}{4}$$

Z suit donc la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$.

b. $E(Z) = 5/2$ et $V(Z) = 5/4$

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

Peut-être qu'un arbre de probabilité vous aiderait à y voir plus clair ... ?

1. $T(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$.
2. Ajoutons deux notations à celles de la première partie. Soit U (respectivement V) l'événement « on tire les deux boules dans l'urne U » (respectivement « dans l'urne V »).

$$P(T = 0) = P[(U \cap B_1 \cap B_2) \cup (V \cap B_1 \cap B_2)]$$

Les événements $(U \cap B_1 \cap B_2)$ et $(V \cap B_1 \cap B_2)$ étant incompatibles (revoir la signification : **Pr4**) :

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(U \cap B_1 \cap B_2) + P(V \cap B_1 \cap B_2) \\ &= P(U) \times P_U(B_1) \times P_U(B_2) + P(V) \times P_V(B_1) \times P_V(B_2) \\ &= \dots = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

On montre même que $P(T = 2) = \frac{5}{32}$ puis on en déduit : $P(T = 1) = \frac{7}{16}$

car la somme des probabilités est égale à 1.

3. $E(T) = 0 \times P(T = 0) + 1 \times P(T = 1) + 2 \times P(T = 2) = \dots = \frac{3}{4}$

T ne suit pas une loi binomiale. Pour s'en convaincre, trouver les deux paramètres que devrait avoir cette loi binomiale en regardant le support puis l'espérance de T . Recalculez alors par exemple $P(T = 0)$ pour conclure.

4.

$$P_{T=1}(U) = \frac{P(U \cap T = 1)}{P(T = 1)} = \dots = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu Face.

Exercice 11

Partie A

1. $X(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$

2. $(X = 2) = R_1 \cap B_2$; $P(X = 2) = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

3. Vous devez calculer, pour tout i de $X(\Omega)$, les valeurs de $P(X = i)$. Commencez par décrire ces événements à l'aide d'événements R_k et B_k comme à la question précédente. Vous devrez utiliser la formule des probabilités composées (Voir **Pr 8**).

On montre que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 4 \rrbracket$. (Voir **Pr 19**)

$$E(X) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{5}{4}$$

4. $X + Y = 4$ donc $Y = 4 - X$ donc $Y(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$ et

pour tout i de $Y(\Omega)$, $P(Y = i) = P(4 - X = i) = P(X = 4 - i) = \frac{1}{4}$ car X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 4 \rrbracket$.

On en déduit que Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; 3 \rrbracket$.

Pour trouver $E(Y)$ et $V(Y)$, on utilise des formules utilisant $E(X)$ et $V(X)$ (Voir **Pr 29**).

$$E(Y) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{5}{4}$$

Partie B

1. $Z(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

2. $(Z = 2) = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$. Il faut alors bien comprendre les deux étapes suivantes :

On a alors, par incompatibilité des événements $(B_1 \cap B_2)$ et $(R_1 \cap R_2)$ (Voir **Pr 4**) :

$$P(Z = 2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2).$$

Puis, par indépendances des événements B_1 et B_2 d'une part et R_1 et R_2 d'autre part (car les tirages s'effectuent avec remise), $P(Z = 2) = P(B_1) \times P(B_2) + P(R_1) \times P(R_2)$ (Voir **Pr 5**).

$$\text{On termine ... } P(Z = 2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

On fait le même travail pour $p(Z = 3)$. On obtient $p(Z = 3) = \frac{3}{16}$.

Bon, on a le droit d'être malin et de constater que les résultats obtenus sont cohérents avec les formules données dans les deux questions suivantes en remplaçant k par 1.

3. L'événement $(Z = 2k)$ est réalisé si et seulement si on a une alternance de boules rouges et blanches jusqu'au rang $2k - 2$ puis, sur les deux derniers tirages, on a deux boules de la même couleur. On peut l'écrire :

$$(Z = 2k) = \left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-2} (B_{2i+1} \cap R_{2i+2}) \right) \cap B_{2k-1} \cap B_{2k} \right] \cup \left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-2} (R_{2i+1} \cap B_{2i+2}) \right) \cap R_{2k-1} \cap R_{2k} \right]$$

On utilise alors les règles vues à la questions 2 sur les événements indépendants et les événements incompatibles.

4. L'événement $(Z = 2k + 1)$ est réalisé si et seulement si on a une alternance de boules rouges et blanches jusqu'au rang $2k$ puis, puis une répétition de la couleur obtenue au rang $2k$. On peut l'écrire :

$$(Z = 2k + 1) = \left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} (B_{2i+1} \cap R_{2i+2}) \right) \cap R_{2k+1} \right] \cup \left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} (R_{2i+1} \cap B_{2i+2}) \right) \cap B_{2k+1} \right]$$

On utilise alors les règles vues à la questions 2 sur les événements indépendants et les événements incompatibles.

5. On doit utiliser les résultats connus sur les séries géométriques (Voir **Ana 17**).

Exercice 12 (D'après ECRICOME 2019)

1. Un petit rappel sur la parité d'une fonction ? Voir **Ana 36**

2. Aides :

- Il faut calculer $\int_1^A f(t) dt$ pour un réel A supérieur à 1 puis faire tendre A vers $+\infty$.
- Pour trouver une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^n}$, deux possibilités :
 - On apprend que c'est $t \mapsto -\frac{1}{n-1} t^{n-1}$
 - On écrit que $\frac{1}{t^n} = t^{-n}$ puis on utilise la formule d'une primitive $t \mapsto \frac{t^{m+1}}{m+1}$ de $t \mapsto t^m$ qui reste valable si $m < -1$.

On trouve : $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2}$ (cela justifie la convergence car cette intégrale sa valeur est finie)

3. **a. Aide** : Sans grande imagination il faut poser : $u = -t$. Attention tout de même de bien préciser les conditions d'utilisation d'un changement de variables : A voir et à se noter **Ana 80**

On trouve : $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2}$

b. Aide : Vous devez bien connaître les 3 propriétés à prouver : A voir et à se noter **Pr 13**

4. **a. Aide** : Ici encore c'est une question très classique : A voir et à se noter **Pr 15**

Remarque : f et F_X s'expriment sur les 3 mêmes intervalles. Il en sera toujours ainsi.

b. Aides :

- Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité ? A voir et à se noter **Pr 11**
- Montrer que si f est paire alors $x \mapsto xf(x)$ est impaire. Vous avez alors une propriété intéressante sur les intégrales.

c. Aide : A voir et à se noter **Pr 11**

Exercice 13

Rappelons que les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions et non des réels. Pour les différencier des équations à solutions réelles, les inconnues de ces équations différentielles sont notées y (y' et y'' seront respectivement les fonctions dérivée et dérivée seconde de y).

Rappelons également que les solutions de ces équations différentielles sont la somme d'une solution quelconque (n'importe quelle fonction qui vérifie l'équation différentielle) et des solutions de l'équation homogène associée à cette équation différentielle (équation avec le membre de droite qui est nul) voir **Ana 93**.

Les 3 premières équations sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. (Un petit rappel ? voir **Ana 94**)

Les 3 dernières sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. (Un petit rappel ? voir **Ana 95**)

1. Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction constante. Sa fonction dérivée étant nulle, cette fonction vérifie l'équation $-7y = 2$. C'est donc la fonction constante $x \mapsto -\frac{2}{7}$.

Les solutions de l'équation homogène $y' - 7y = 0$ sont de la forme $x \mapsto ke^{7x}$ où k est un réel quelconque. Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x) = ke^{7x} - \frac{2}{7}, k \in \mathbb{R}$$

Puisque $f(0) = \frac{5}{7}$ alors $ke^{7 \times 0} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ donc $\dots k = 1$. Ainsi $f(x) = e^{7x} - \frac{2}{7}$.

2. Les solutions de l'équation homogène $3y' - 4y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{4}{3}y$ $x \mapsto ke^{\frac{4}{3}x}$ où k est un réel quelconque. Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction polynôme degré 3. Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$P \text{ est solution de l'équation différentielle ssi } 3P'(x) - 4P(x) = -4x^3 + 9x^2 + 4x - 11 \\ \Leftrightarrow 3(3ax^2 + 2bx + c) - 4(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -4x^3 + 9x^2 + 4x - 11$$

Puis on procède par identification (résolution d'un système) et on obtient : $a = 1, b = 0, c = -1$ et $d = 2$. Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x) = ke^{\frac{4}{3}x} + x^3 - x + 2, k \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ sont de la forme $x \mapsto ke^{-x}$ où k est un réel quelconque. On cherche particulière g sous la forme $P(x)e^{-2x}$ où P est une fonction polynôme. g est solution de l'équation différentielle ssi $g'(x) + g(x) = (-4x + 1)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow P'(x)e^{-2x} - 2P(x)e^{-2x} + P(x)e^{-2x} = (-4x + 1)e^{-2x} \Leftrightarrow P'(x) - P(x) = -4x + 1$$

On montre alors que nécessairement P doit être de degré 1.

On peut alors choisir de poser $P(x) = ax + b$. On alors $P'(x) = a$.

Ainsi : $P'(x) - P(x) = -4x + 1 \Leftrightarrow a + ax + b = -4x + 1$, donc, par identification : $a = -4$ et $b = 5$ donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x) = ke^{-x} + (-4x + 5)e^{-2x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

4. Les équations différentielles homogènes du second ordre ne se résolvent pas comme celles du premier ordre. Il faut tout d'abord rechercher les solutions de l'équation caractéristique. Ici l'équation caractéristique est : $r^2 - 10r + 25 = 0$. On montre facilement (après recherche du discriminant ou identité remarquable) que cette équation a une solution « double » : 5.

Ainsi les solutions de l'équation homogène $y'' - 10y' + 25y = 0$ sont de la forme : $x \mapsto (ax + b)e^{5x}$.

Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction constante. Ses fonctions dérivées et dérivée seconde étant nulles, cette fonction vérifie l'équation $25y = 50$. C'est donc la fonction constante égale à 2.

Donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $x \mapsto (ax + b)e^{5x} + 2$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

5. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 5r + 6 = 0$. On montre facilement (après recherche du discriminant) que cette équation a deux solutions : -2 et -3 .

Ainsi les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $x \mapsto \alpha e^{-2x} + \beta e^{-3x}$

Pour trouver une solution particulière, on cherche une fonction polynôme degré 1. Posons $P(x) = ax + b$ alors $P'(x) = a$ et $P''(x) = 0$.

P est solution de l'équation différentielle ssi $P''(x) + 5P'(x) + 6P(x) = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow 0 + 5a + 6(ax + b) = 2x - 3$$

Puis on procède par identification (résolution d'un système) et on obtient : $a = 1/3, b = -7/9$

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x) = \alpha e^{-2x} + \beta e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Puisque $f(0) = \frac{20}{9}$ alors $\alpha + \beta - \frac{7}{9} = \frac{20}{9}$ donc $\alpha + \beta = 3$

Puisque $f'(0) = -\frac{23}{3}$ alors $\dots -2\alpha - 3\beta + \frac{1}{3} = -\frac{23}{3}$ donc $\dots \alpha = 1$ et $\beta = 2$.

Donc la solution recherchée de cette équation différentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-2x} + 2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

6. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 - 9 = 0$ qui a pour solutions -3 et 3 . Ainsi les solutions de l'équation homogène $y'' - 9y = 0$ sont de la forme : $x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^{3x}$.

• Recherchons une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 9y = e^{2x}$ sous la forme $g(x) = ke^{2x}$. En remplaçant dans cette équation différentielle, on montre que $k = -1/5$.

• Recherchons une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 9y = 3x$ sous la forme $h(x) = ax + b$. En remplaçant dans cette équation différentielle, on montre que $a = -1/3$ et $b = 0$.

La méthode de superposition des solutions nous permet d'affirmer que la somme des deux solutions particulières que nous venons de trouver ($x \mapsto g(x) + h(x)$) est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 9y = e^{2x} + 3x$

Nous pouvons conclure : l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^{3x} - \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{3}x \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 14

1. a. Il n'y a pas d'arête reliant B à M donc le graphe n'est pas complet.

b. Deux arêtes quelconques peuvent être reliées par un chemin donc le graphe est connexe. Par exemple, le chemin B - C - L - N - A - M - T - H relie tous les sommets entre eux.

c. Une chaîne eulérienne est un chemin qui part d'un sommet et parcourt toutes les arêtes une fois et une seule. D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne si le graphe a 0 ou 2 sommets de degrés impairs. Les sommets A, B, L et M sont de degré 3 donc impair, donc il n'existe pas de chaîne eulérienne dans ce graphe.

2. Une personne veut aller de Hendaye à Nice. On détermine, au moyen de l'algorithme de DIJKSTRA, le trajet qui est le plus économique :

H	B	T	C	M	L	A	N
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	14A	27H	∞	∞	∞	∞	∞
		26B	41B	∞	∞	∞	∞
			41B	56T	∞	∞	∞
				55C	53C	∞	∞
				55C		69L	88L

						62L	88L
							81A

Le trajet qui est le plus économique permettant de relier Hendaye à Nice est donné par la chaîne :
 $H - B - C - M - A - N$.

Ce trajet coûte 81 euros.

Exercice 15

1. Le graphe est connexe car il ne comporte aucun sommet isolé (tous les sommets peuvent être reliés par une chaîne).

2. a. Pour qu'il existe un trajet empruntant toutes les routes une fois et une seule, il faut qu'il existe une chaîne eulérienne dans le graphe.

Sommet	D	E	F	G	H	I	J	S
Degré	2	4	5	3	4	4	4	2

D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne dans un graphe connexe si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. Ici on a 2 sommets de degré impair (F et G), donc il existe bien une chaîne eulérienne dans ce graphe. Il existe donc un trajet empruntant une fois et une seule toutes les routes.

b. Pour déterminer un tel trajet, on utilise l'algorithme d'Euler

Cycle	Chaîne
E-D-H-E	F-E-G
H-I-G-F-S-J-H	F-E-D-H-E-G
J-I-F-J	F-E-D-H-I-G-F-S-J-H-E-G
	F-E-D-H-I-G-F-S-J-I-F-J-H-E-G

Un trajet est donc F-E-D-H-I-G-F-S-J-I-F-J-H-E-G.

3. a. Partie manquante de M :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Pour déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à F en empruntant 3 routes, il faut trouver le nombre de chaînes de longueur 3 reliant D à F dans le graphe. Le nombre de chaînes de longueur 3 est donné par les coefficients de la matrice M^3 . Pour les chaînes reliant D à F on doit donc lire le coefficient de la 1^{re} ligne et 3^{me} colonne. $m_{13} = 4$. Il y a donc 4 itinéraires reliant D à F en empruntant 3 routes.

Ces itinéraires sont : D-E-G-F; D-H-E-F; D-H-I-F; D-H-J-F

1. Il faut se mettre au travail tout de suite. Une semaine en classe préparatoire vaut bien 3 ou 4 semaines de lycée et vous risquez d'être vite perdus. Beaucoup d'élèves se découragent dès ce début de l'année mais c'est un passage obligé et, rassurez-vous, tout le monde peut tenir ce rythme de travail.
2. Il faut apprendre son cours. Apprenez à écouter, à lire, à comprendre, à savoir restituer les définitions, les propriétés, les théorèmes mais aussi les exemples du cours.
3. Le travail régulier, quotidien est indispensable pour assimiler toutes les notions car il est plus facile d'assimiler un cours récent. Ne laissez pas tomber un cours pendant une semaine pour vous focaliser sur une autre discipline en vue d'un contrôle. Il vous sera alors très difficile de revenir dessus.
4. Elaborez des fiches de cours avec des codes de couleurs... et pensez à les relire régulièrement.
5. Elaborez également des fiches d'erreurs. Comprendre son erreur ne signifie pas qu'on ne va pas la refaire. Combien de points supplémentaires pourriez-vous avoir à chaque devoir en évitant ces erreurs ? Il faut se les noter avec les corrections et les revoir très fréquemment. C'est pour vous y aider que Monsieur VAILLANT vous a distribué un livret qui doit vous permettre de référencer les principales erreurs que vous commettez.
6. Il faut faire et refaire les exercices. Lire est une activité trop passive qui ne permet pas une bonne assimilation. Faites au minimum 3 fois chaque exercice (une fois lorsqu'on le fait en classe, une deuxième fois dans les jours qui suivent puis une troisième fois pour préparer un contrôle ou une interrogation).
7. Apprenez à « sécher » longtemps sur un exercice. C'est en réussissant des exercices difficiles qu'on prend confiance et qu'on progresse.
8. Faites les exercices avec le cours sous les yeux pour faciliter son assimilation et vérifier de manière précise et rigoureuse son contenu.
9. Apprenez à vous vérifier. Il vous faut éviter de trop nombreuses erreurs d'étourderie. La relecture ligne après ligne doit être automatique. Ce mécanisme peut s'acquérir en s'entraînant à poser son stylo après chaque ligne écrite sur des exercices faits à la maison.
10. Il ne faut pas avoir peur d'explorer des pistes et de revenir sur ses pas si elles ne donnent rien. Si on reste bloqué sans rien faire, l'imagination est paralysée.
11. La rédaction, les justifications, l'argumentation demandent des efforts mais font partie de la formation à la rigueur des élèves de classes préparatoires. Soyez précis dans vos affirmations, vérifiez les hypothèses, les articulations logiques (donc, implique, est équivalent à ...). Refaites les exercices avec la rédaction et comparez-la avec celle donnée par votre professeur.
12. Soyez à la fois altruiste et égoïste :
Altruiste car, même si les places sont chères, vous avez beaucoup plus à gagner qu'à y perdre en participant à un groupe, en échangeant, en créant un environnement propice au travail et à la réussite de chacun.
Égoïste : ne sortez jamais de cours sans avoir compris quelque chose. Moquez-vous des regards des autres qui vous font croire qu'ils ont compris. Vous mettrez beaucoup de temps à trouver une solution chez vous tout seul alors qu'un professeur peut vous la donner tout de suite.
13. Pour finir n'oubliez pas que votre réussite dépend de votre organisation, du temps que vous pourrez consacrer à votre formation. Il est souhaitable de continuer une activité culturelle, sportive, associative, etc... pendant vos années de classes préparatoires mais il faut vous organiser pour ne faire et ne penser qu'à une chose à la fois.

Enfin, ces quelques conseils ne peuvent remplacer ceux que vos professeurs pourront vous donner de manière individuelle tout au long de ces deux années difficiles, ni surtout ceux que vous aurez trouvés vous-même, avec votre propre expérience.